Izvodi i diferencijali višeg reda

Parcijalni izvodi višeg reda

Ako su parcijalni izvodi $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ funkcije $u=f(x,y,z)$ diferencijabilne f-je, to tada možemo tražiti njihove parcijalne izvode.

Za f-ju $v=\frac{\partial u}{\partial x}$ parcijalni izvodi su

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right);\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right);\ \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

i nazivamo ih parcijalnim izvodima drugog reda i označavamo sa $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$ respektivno.

Slično se definišu izvodi drugog reda za f-je $\frac{\partial u}{\partial y}$ i $\frac{\partial u}{\partial z}$, $u=f(x,y,z)$.

Na primjer

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Analogno se uvode parcijalni izvodi trećeg reda. Na primjer, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$ označava da f-ju u diferenciramo prvo po z, pa po y, a na kraju po x, tj.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)$$

Parcijalne izvode višeg reda f-je u po različitim ~~promjenljivim~~ nazivamo uspješnim parcijalnim izvodima, na pr. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial z\partial z}$ itd., $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ itd. ~~Promj~~ Izvode po istoj promjenljivoj ~~na po~~ tipa $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial x\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial y}$ označavamo sa $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ itd.

Izvod $\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial z\partial z}$ označavamo $\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial z^2}$.

Često se koriste i oznake

$$u'''_{x^2y}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial x\partial y}=u_{x^2y},\ u^{IV}_{xy^2z}=\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^2\partial z}=u_{xy^2z}.$$

Primjer Nađi sve parcijalne izvode f-je $u=\ln(3x-5y)$

Rješenje $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3}{3x-5y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{5}{3x-5y}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{9}{(3x-5y)^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{15}{(3x-5y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{15}{(3x-5y)^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{25}{(3x-5y)^2}.$$

Vidimo da su izvodi $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ su jednaki. Ovo nije slučajno. Važi sljedeća teorema

Teorema Ako funkcija $z=f(x,y)$ ima u tački $M=(x,y)$ neprekidne parcijalne izvode drugog reda f''_{xy} i f''_{yx} to je tada

$$f''_{xy} = f''_{yx} \qquad (1)$$

Iz teoreme slijedi da ako su svi izvodi koje računamo neprekidne funkcije u datoj oblasti to važe jednakosti:

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}$$

$$f'''_{xyy} = f'''_{yxy} = f'''_{yyx}$$

$$f^{IV}_{xxyy} = f^{IV}_{xyxy} = f^{IV}_{yxyx} = f^{IV}_{yyxx} \quad \text{itd.}$$

Znači, pri višekratnom diferenciranju funkcije više promjenljivih poredak diferenciranja nije bitan, naravno, ako su izvodi koji se računaju neprekidne funkcije.

Diferencijali višeg reda

Neka f-je $z=f(x,y)$ promj. x i y ima neprekidne parcijalne izvode ~~prvog~~ višeg ~~poretka~~ reda. Tada je njen diferencijal prvog reda

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

funkcija f-ja četiri promjenljive x, y, dx i dy.

Postavlja se pitanje čemu je jednak drugi diferencijal $d^2z = d(dz)$.

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial}{\partial x}(dz)dx + \frac{\partial}{\partial y}(dz)dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \quad (2)$$

Ovdje smo koristili da je $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ i $dx^2 = dxdx$, $dy^2 = dydy$

Analogno nalazimo

$$d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3 \quad (3)$$

$$d^4z = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\cdot dx^4 + 4\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}dx^3dy + 6\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}dx^2dy^2 + 4\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3}dxdy^3 + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}dy^4 \quad (4)$$

itd. Indukcijom dobijamo da je

$$d^nz = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n + C_n^1\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + C_n^2\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2 + \cdots +$$

$$+ C_n^k\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k + \cdots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n}dy^n. \quad (5)$$

Simbolički (5) možemo zapisati kao

$$\underline{d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot z}$$

Njutnova binomna formula

Primjer

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

što se poklapa sa (3).

Ako imamo funkciju $u = f(x,y,z)$, d^nu simbolički možemo zapisati

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n u$$

Primijetimo da za fju $z=f(x,y)$ diferencijal d^2z možemo zapisati kao

$$d^2z=(dx,dy)\cdot H\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}$$

gdje je $H=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}$ – Heseova matrica

(Hese - njemački matematičar 1811–1874)

Analogno za fju $u=f(x,y,z)$ drugi diferencijal je jednak

$$d^2u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}dydz+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}dxdz+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2.$$

ili

$$d^2u=(dx,dy,dz)\,H\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}$$

gdje je $H=\begin{pmatrix}u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz}\\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz}\\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz}\end{pmatrix}$ – Heseova matrica

Za funkciju $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ njen drugi diferencijal možemo zapisati

$$d^2u=(dx)^T H\,(dx)$$

gdje je $(dx)^T=(dx_1,dx_2,\dots dx_n)$ $\quad H=(u''_{x_ix_j})$ Heseova matrica.

$$H=\begin{pmatrix}u''_{x_1^2} & u''_{x_1x_2} & \dots & u''_{x_1x_n}\\ u''_{x_2x_1} & u''_{x_2^2} & \dots & u''_{x_2x_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u''_{x_nx_1} & u''_{x_nx_2} & \dots & u''_{x_n^2}\end{pmatrix}$$

Tejlorova formula za funkcije više promenljivih

Ograničićemo se na razmatranje funkcija dvije promenljive.
Neka ~~je~~ fja $z=f(x,y)$ ima u δ-okolini tačke $M_0=(x_0,y_0)$ neprekidne parcijalne izvode do m-tog reda, uključujući m-ti red. Izaberimo tačku $M=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ iz te okoline i spojimo tačke M_0 i M ~~intervalom~~ pomoću duži ~~prave~~ ~~duži~~, čija ~~su~~ je parametarska jednačina

$$x=x_0+t\Delta x,\ y=y_0+t\Delta y,\ 0\le t\le 1.$$

U tačkama ove duži fja $z=f(x,y)$ je fja nezavisne promenljive t

$$z=f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)=F(t) \qquad (1)$$

Priraštaj fje $z=f(x,y)$ u tački M_0 je

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=F(1)-F(0) \quad (2)$$

Pošto je fja f u okolini tačke M_0 m-puta neprekidno diferencijab. to je tada i fja F na intervalu $[0,1]$ m puta nepr. diferencijab.
Znači ~~promenljive~~ fju F možemo razložiti u Maklorenov red s ostatkom u Lagranžovom obliku ~~ostatkom~~:

$$F(t)-F(0)=F'(0)\cdot t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\frac{F'''(0)}{3!}t^3+\cdots+\frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1}+\frac{F^{(m)}(\theta t)}{m!}t^m$$

$$0<\theta<1$$

Pri $t=1$ dobijamo da je

$$F(1)-F(0)=F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\cdots+\frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}+\frac{F^{(m)}(\theta)}{m!},\ 0<\theta<1 \quad (3)$$

Izrazimo sada $F^{(k)}(0)$ preko izvoda fje $f(x,y)$ u tački M_0. Imamo da je $(1) \Rightarrow$

~~$F'(t)=\frac{d}{dt}F'$~~

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)}{\partial x}\cdot\Delta x+ \\ +\frac{\partial f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)}{\partial y}\Delta y$$

Dalje

$$F''(t)=\frac{d}{dt}F'(t)=\frac{\partial^2 f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+ \\ +\frac{\partial^2 f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)}{\partial y^2}\Delta y^2=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$$

Analogno

$$F'''(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^3 f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$$

Pomoću indukcije dobijamo da je

$$F^{(k)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{k} f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y),\ k=1,2,\dots,m \quad (4)$$

U formulu (4) stavimo da je $t=0$, dobijamo da je

$$F'(0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y=df(M_0)$$

$$F''(0)=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2=d^2 f(M_0)$$

— — — — — — — — (5)

$$F^{(m-1)}(0)=d^{(m-1)}f(M_0)$$

Za $k=m$ iz (4) imamo da je

$$F^{(m)}(\theta t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{m} f(x_0+\theta t\Delta x, y_0+\theta t\Delta y)=d^m f(x_0+\theta t\Delta x, y_0+\theta t\Delta y)$$

stavimo da je $t=1$ imamo da je

$$F^{(m)}(\theta)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{m} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=d^m f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y) \quad (6)$$

zamijenimo (5) i (6) u (3) $\Longrightarrow$

$$\Delta z= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f(M)-f(M_0)=\left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f(M_0)}{\partial x^3}\Delta x^3+3\frac{\partial^3 f(M_0)}{\partial x^2\partial y}\Delta x^2\Delta y+3\frac{\partial^3 f(M_0)}{\partial x\partial y^2}\Delta x\Delta y^2+\frac{\partial^3 f(M_0)}{\partial y^3}\Delta y^3\right]+$$

$$+\dots+\frac{1}{(m-1)!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{m-1} f(M_0)\right]+\frac{1}{m!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{m} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\right] \quad (7)$$

Formula (7) se zove Tejlorovom formulom za funkcije dvije promjenljive $z=f(x,y)$ s ostatkom u Lagranžovoj formi.

Pomoću diferencijala Tejlorovu formulu možemo da zapišemo

$$\Delta f(M_0)=df(M_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(M_0)+\frac{1}{3!}d^3 f(M_0)+\dots+\frac{1}{(m-1)!}d^{m-1}f(M_0)+$$

$$+\frac{1}{m!}d^m f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y) \quad (8)$$

(8) se zove Tejlorova formula u diferencijalnoj formi.

Primijetimo da ~~za~~ funkcije n-promjenljivih $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koje imaju u okolini tačke $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ neprekidne parc. izvode do m-tog reda, ~~...~~ Tejlorova formula u diferencijalnoj formi ima oblik:

$$\Delta f(M_0) = df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(M_0) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} d^{m-1} f(M_0) + \frac{1}{m!} d^m f(x_1^0 + \theta \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \theta \Delta x_n) \qquad (9)$$

Primjer Razložiti u Tejlorov red u okolini tačke $(0,0)$ do diferencijala trećeg reda) funkciju $f(x,y) = \dfrac{1}{1-x-y}$.

Rješenje

$f'_x = f'_y = (1-x-y)^{-2}$ $\qquad f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 1$

$f''_{xy} = f''_{yx} = 2(1-x-y)^{-3}$ $\qquad f''_{xy}(0,0) = 2$

$f''_{xx} = f''_{yy} = 2(1-x-y)^{-3}$ $\qquad f''_{xx}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = 2$

$f'''_{x^3} = f'''_{y^3} = f'''_{x^2y} = f'''_{xy^2} = 6(1-x-y)^{-4}$ $\qquad f'''_{xxx}(0,0) = \dots = f'''_{xy^2}(0,0) = 6$

Po ~~...~~ Tejlorovoj formuli (7) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{1-x-y} = 1 + x + y + (x^2 + 2xy + y^2) + (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + R_4(x,y) =$$

$$= 1 + (x+y) + (x+y)^2 + (x+y)^3 + R_4(x,y)$$

$R_4(x,y)$ – ostatak ~~$R_4(x,y)$~~

$\boxed{\text{Implicitne funkcije}}$

Pojam implicitne f-je koja je zadata jednom jednačinom i njeno diferenciranje

Neka je $y = f(x)$ definisana u D i neka je uzajamno jednoznačna f-ja neka za nju postoji f-ja $x = f^{-1}(y)$.

Razmotrimo opštiji problem o rješivosti jednačine $F(x,y) = 0$ po x ili po y, a takođe analognih jednačina ~~...~~ kod kojih F zavisi od većeg broja promjenljivih.

Iz analitičke geometrije znamo da pri ~~nekim~~ određenim uslovima jednačina $F(x,y)=0$ zadaje krivu ~~na~~ u ravni XOY. Da bi dobili y kao funkciju od x (ili x kao funkciju od y) neophodno je riješiti jednačinu $F(x,y)=0$ u odnosu na y (~~x~~ ili x).
Govorimo da jednačina $F(x,y)=0$ definiše y kao f-ju od x (x kao f-ju od y) implicitno ili u implicitnom obliku.
Rješavajući tu jednačinu dobijamo f-ju oblika $y=f(x)$, ili $x=\varphi(y)$ u eksplicitnom obliku.
Postavlja se pitanje, kakva svojstva f-je F garantuju egzistenciju eksplicitne f-je $y=f(x)$ ili $x=\varphi(y)$. Drugim riječima, pri kojim uslovima funkcionalna jednačina $F(x,y)=0$ je jednoznačno rješiva u odnosu na y ili x? Odgovor na to pitanje daje sljedeća teorema.

<u>Teorema 1.</u> Neka je funkcija $F(x,y)$ neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini tačke (x_0,y_0). Ako

1) $F(x_0,y_0)=0$; 2) $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$

to tada postoji okolina tačke (x_0,y_0) u kojoj je jednačina $F(x,y)=0$ jednoznačno rješiva po y tj postoji okolina $U_\delta(x_0)$ tačke x_0 jednoznačno-diferencijabilna f-ja $y=f(x)$ takva i jedinstvena neprekidno-diferencijabilna f-ja $y=f(x)$ takva da je $F(x,f(x))=0$ $\forall x\in U_\delta(x_0)$ i $y_0=f(x_0)$.

Razmotrimo pitanje diferencijabilnosti implicitne f-je koja je definisana jednačinom $F(x,y)=0$.
Neka je $F(x,y)$ neprekidno diferencijabilna f-ja takva da je $F'_y(x,y)\neq 0$.
Po teoremi 1 postoji nepr. dif. f-ja $y=f(x)$ definisana implicitno iz jednačine $F(x,y)=0$. Tada je izvod te f-je jednak

$$y'=f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \qquad (1)$$

Koristeći formulu totalnog izvoda iz $F(x,f(x))\equiv 0$ imamo da je

$$\frac{d}{dx}\left[F(x,f(x))\right]=F'_x+F'_y\cdot\frac{df}{dx}=F'_x+F'_y\cdot y'=0$$

odavde i slijedi formula (1).

Nađimo sada drugi izvod implicitne f-je.

$$y'' = -\frac{F'_y\,(F''_{xx} + F''_{xy}\cdot y') - F'_x\,(F''_{yx} + F''_{yy}\cdot y')}{F'^2_y} = \left(-\frac{F'_x}{F'_y} = y'\right) =$$

$$= -\frac{F''_{xx}F'^2_y - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}\cdot F'^2_x}{F'^3_y}.$$

Analogno je moguće računati y''' i y^{IV} itd.

Primjer 1 Naći y'_x ako je $x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$.

Rješenje Pošto je $F(x,y) = x^2e^{2y} - y^2e^{2x}$ to je

$$y'_x = -\frac{2xe^{2y} - 2y^2e^{2x}}{2x^2e^{2y} - 2ye^{2x}} = \frac{y^2e^{2x} - xe^{2y}}{x^2e^{2y} - ye^{2x}}$$

Primjer 2 Naći jednačine tangente i normale na krivoj zadate jednačinom $F(x,y) = 0$ u tački (x_0,y_0).

Rješenje ~~Jednačina~~ traženih tangente i normal je

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \quad \text{i} \quad y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}\cdot(x - x_0)$$

Koristeći činjenicu da je $y' = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$ imamo da je

t: $y - y_0 = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}(x - x_0)$ ili $F'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F'_y(y - y_0) = 0$, a jedn. normale

n: $y - y_0 = \frac{F'_y(x_0,y_0)}{F'_x(x_0,y_0)}(x - x_0)$ ili $F'_x(x_0,y_0)(y - y_0) - F'_y(x_0,y_0)(x - x_0) = 0$

Implicitna f-ja više promjenljivih definisana jednom jednačinom

$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – definisana jednačinom $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$

ili $F(x,y,z) = 0$ definiše implicitnu f-ju $z = f(x,y)$

Teorema 2 Neka je f-ja $F(x,y,z)$ neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini tačke (x_0,y_0,z_0). Ako je

1) $F(x_0,y_0,z_0) = 0$; 2) $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$

to postoji okolina tačke (x_0,y_0,z_0) u kojoj je jednačina $F(x,y,z) = 0$ jednoznačno rješiva po z tj. postoji okolina $U_\delta(x_0,y_0)$ tačke (x_0,y_0) i jedinstvena nepr. diferencijabilna f-ja $z = f(x,y)$ takva da je $F(x,y,f(x,y)) \equiv 0 \;\; \forall (x,y) \in U_\delta(x_0,y_0)$ i $z_0 = f(x_0,y_0)$.

Parcijalni izvodi $z=f(x,y)$ se računaju po formuli:

$$z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

<u>Primjer</u> Pokazati da jednačina $x+y+z=\sin(xyz)$ ima jedinstveno rješenje $z=f(x,y)$ u okolini tačke $(0,0)$ takvo da je $z(0,0)=0$ ~~u~~ toj tački. Naći parcijalne izvode tog rješenja u toj tački.

<u>Rješenje</u> $F(x,y,z)= x+y+z-\sin(xyz)$ – nepr. dif u $(0,0,0)$.

$$F(0,0,0)=0, \quad F'_z = (1-xy\cos(xyz))\Big|_{(0,0,0)} = 1 \neq 0.$$

Po teoremi 2 postoji jedinstveno rješenje $z=f(x,y)$ jednačine $x+y+z=\sin(xyz)$ koje pri $x=0$ i $y=0$ ima vrijednost $z=0$.

Parcijalni izvodi te fje u $(0,0)$ su

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = -\frac{1-yz\cos(xyz)}{1-xy\cos(xyz)}\Big|_{(0,0,0)} = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = -\frac{1-xz\cos(xyz)}{1-xy\cos(xyz)}\Big|_{(0,0,0)} = -1$$

<u>Regularna preslikavanja</u>

Neka je $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ koja vektor $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ preslikava u vektor $y=(y_1,y_2,\dots,y_m)\in\mathbb{R}^m$, naziva se preslikavanjem iz $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\dots,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = f(x)$$

$f_1, f_2, \dots, f_m$ – su koordinatne fje preslikavanja f.

<u>Definicija</u> Preslikavanje f je diferencijabilno u tački $x_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\in$ ako je svaka koordinatna fja $f_1, f_2, \dots, f_m$ diferencijabilna u toj tački što je isto što i postojanje parcijalnih izvoda fja $f_i, i=1,2,\dots,n$ po svim promjenljivim.